Zadatak 1. Je li

$$v(x,y) = e^x(y\cos y + x\sin y) + 3x$$

harmonijska funkcija? Ako jest, za koju holomorfnu funkciju $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vrijedi $v = \operatorname{Re} f$?

Rješenje. **(2 boda)** Da, funkcija je harmonijska. Naime;

$$\partial_x v(x,y) = e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) + 3$$
$$\partial_x^2 v(x,y) = e^x(y\cos y + x\sin y + 2\sin y)$$
$$\partial_y v(x,y) = e^x(\cos y - y\sin y + x\cos y)$$
$$\partial_y^2 v(x,y) = -e^x(2\sin y + y\cos y + x\sin y).$$

(2 boda) Po Cauchy-Riemannovim uvjetima, ako zapišemo $f = (v, w)$, imamo:

$$\begin{aligned}
\partial_x w(x,y) = -\partial_y v(x,y) \implies w(x,y) &= -\int e^x(\cos y - y\sin y + x\cos y)\,dx \\
&= -e^x(\cos y - y\sin y) - \cos y \int xe^x\,dx \\
&= \begin{bmatrix} u = x & dv = e^x\,dx \\ du = dx & v = e^x \end{bmatrix} \\
&= e^x(-\cos y + y\sin y) - \cos y(xe^x - e^x) + C(y) \\
&= e^x(y\sin y - x\cos y) + C(y)
\end{aligned}$$

$$\partial_x v(x,y) = \partial_y w(x,y) \implies \partial_x v(x,y) = e^x(\sin y + y\cos y + x\sin y) + C'(y)$$

što implicira $C'(y) = 3$, tj. $C(y) = 3y + D$, $D \in \mathbb{R}$ i

$$w(x,y) = e^x(y\sin y - x\cos y) + 3y + D.$$

(1 bod) Dakle, funkcija čiji je realni dio funkcija v jest:

$$\begin{aligned}
v(x,y) + iw(x,y) &= e^x(y\cos y + x\sin y) + 3x + ie^x(y\sin y - x\cos y) + 3yi + Di \\
&= e^x((y - ix)\cos y + (x + iy)\sin y) + 3(x + iy) + Di \\
&= e^x(-iz\cos y + z\sin y) + 3z + Di \\
&= -ize^{iz} + 3z + Di, \quad D \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Zadatak 2. Izračunajte integral:

$$\int_{\gamma} \sin z \, dz$$

gdje je $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ krivulja zadatakana s $\gamma(t) = \pi(3t^2 - 4)$.

Rješenje. **(5 bodova)** Funkcija $\sin z$ ima primitivnu funkciju $F(z) = -\cos z$ pa samo računamo:

$$\int_{\gamma} \sin z \, dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = -\cos(-\pi) + \cos(-4\pi) = 1 + 1 = 2.$$

Zadatak 3. Provjerite konvergira li red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}.$$

Rješenje. **(5 bodova)** Provjeravamo d'Alembertovim kriterijom:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n^2+2n+1}}}{\frac{n!}{2^{n^2}}} = \lim_n \frac{n+1}{2^{2n+1}} = 0 < 1.$$

Dakle, red konvergira.

Zadatak 4. Razvijte funckiju

$$f(z) = \frac{z}{1-2z^3}$$

u Taylorov red oko 0. Koji je radijus konvergencije ovog reda?

Rješenje. **(3 boda)**

$$\frac{z}{1-2z^3} = z\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{3k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{3k+1}$$

(2 boda) Imamo

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3n+1]{|2^n|} = \sqrt[3]{2} \implies r = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Zadatak 5. Odredite Taylorov razvoj funkcije $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ zadane sa $f(z) = \frac{1}{z}$ oko točke $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Koliki je radijus konvergencije tog reda? Dokažite svoju tvrdnju.

Rješenje.
(4 boda)

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z - z_0 + z_0} = \frac{1}{z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{-z_0}} = \frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z_0^n} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} (z - z_0)^n$$

(1 bod) Radijus konvergenije je sada:

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}}}{\frac{(-1)^{n+1}}{z_0^{n+2}}} \right| = |z_0|.$$